The volume conjecture of the coloured Jones invariants with arbitrary colours

早稲田大学 大学院基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
角田 真一朗 (KAKUTA, Shinichiro) *

概要

体積予想は，量子不変量を双曲幾何と結び付けるものである．Chen–Yang は，3 次元多様体の量子不変量に対して体積予想を定式化し，Murakami は絡み目補空間の双曲構造の変形に対応する色の列を考えて，Chen-Yang 予想に基づく色付き Jones 多項式の体積予想を提唱した．本講演では，Murakami が色付き Jones 多項式に対して提唱した体積予想を紹介し，その解明に向けた本研究のアプローチを述べる．主結果として，8 の字結び目および Borromean 環に対する，ある条件下での予想の証明を提示する．証明においては，漸近挙動を厳密に議論して極限を計算するために，色付き Jones 多項式に付随するポテンシャル関数の解析を行う．

1 色付き Jones 多項式

本稿では，r を 3 以上の奇数とし，$s = e^{2\pi\sqrt{-1}/r}$ とする．半整数ウェイト $\lambda, \lambda' \in \{j/2 \,|\, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq r-2\}$ に対して，$N = 2\lambda+1, N' = 2\lambda'+1$ とおき，N 次元ベクトル空間 V および N' 次元ベクトル空間 V' の基底 (e_i) および (e'_j) をとる．また，n に対して，

$$\{n\} = q^{n/2} - q^{-n/2} = s^n - s^{-n}, \quad \{n\}! = \prod_{k=1}^{n} \{k\}, \quad \{0\}! = 1 \quad (q = s^2)$$

とする．量子展開環 $\mathcal{U}_q(sl_2)$ の表現に由来する，

$$R_{VV'}(e_i \otimes e'_j) = \sum_{k=0}^{\min\{2\lambda+i, 2\lambda'-j\}} \frac{\{2\lambda-i+k\}!\{2\lambda'+j+k\}!}{\{k\}!\{2\lambda-i\}!\{2\lambda'+j\}!} s^{2ij+k(i-j)-k(k+1)/2} e'_{j+k} \otimes e_{i-k}$$

から定まる量子 R-行列 $R_{VV'} : V \otimes V' \to V' \otimes V$ について，$R^{-1}_{VV'}$ は

$$R^{-1}_{VV'}(e'_i \otimes e_j) = \sum_{k=0}^{\min\{2\lambda-i, 2\lambda'+j\}} \frac{\{2\lambda-j+k\}!\{2\lambda'+i+k\}!}{\{k\}!\{2\lambda-j\}!\{2\lambda'+i\}!} s^{-2ij+k(i-j)+k(k+1)/2} e_{j-k} \otimes e'_{i+k}$$

で与えられる．ここで，

$$R_{VV'}(e_i \otimes e'_j) = \sum_{k,l} (R^+)^{kl}_{ij} e'_k \otimes e_l,$$

* E-mail: s.kakuta@ruri.waseda.jp

$$R^{-1}_{VV'}(e'_i \otimes e_j) = \sum_{k,l} (R^-)^{kl}_{ij} e_k \otimes e'_l$$

とおき，上記の係数 $(R^+)^{kl}_{ij}$ ならびに $(R^-)^{kl}_{ij}$ を絡み目 L の図式の各交点に図 1.1 のように割り当てる．

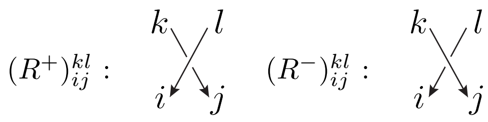

図 1.1: 図式の交点と量子 R-行列の係数.

また，図式の極小点および極大点については，

$$\mu(e_j) = q^j e_j$$

を満たすスカラー μ を図 1.2 のように割り当てる．

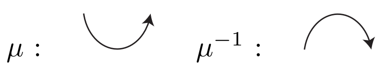

図 1.2: 図式の極小点・極大点とスカラー μ.

絡み目 L の成分数を ℓ とし，$\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_\ell)$ を色（ウェイト）の組とすると，L の（量子）不変量である色付き Jones 多項式 $V^{(r)}_{\boldsymbol{j}}(L) = V^{(r)}_{\boldsymbol{j}}(L; q = e^{4\pi\sqrt{-1}/r})$ は，上記を適切に掛け合わせて足し上げることで得られる．

Example 1.1. 8 の字結び目 E および Borromean 環 B の色付き Jones 多項式は，それぞれ

$$\begin{aligned}
V^{(r)}_j(E) &= \sum_{k=0}^{2j} \frac{\{2j+1+k\}!}{\{1\}\{2j-k\}!}, \\
V^{(r)}_{\boldsymbol{j}}(B) &= \sum_{k=0}^{\min\{2j_1, 2j_2, 2j_3\}} (-1)^k \frac{\{2j_1+1+k\}!\{2j_2+1+k\}!\{2j_3+1+k\}!}{\{1\}\{2j_1-k\}!\{2j_2-k\}!\{2j_3-k\}!} \left(\frac{\{k\}!}{\{2k+1\}!}\right)^2
\end{aligned}$$

となる．

Remark 1.2. 色付き Jones 多項式には $\mathcal{U}_q(sl_2)$ の一般の次元の既約表現が対応しているが, $V = V'$ かつ $N = 2$（自然表現）のとき,

$$R_{VV} = \begin{pmatrix} s^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^{-1/2} & 0 \\ 0 & s^{-1/2} & s^{1/2} - s^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s^{1/2} \end{pmatrix}$$

であり，4 次単位行列を I_4 と書くことにすると,

$$s^{1/2} R_{VV} - s^{-1/2} R^{-1}_{VV} = (s - s^{-1}) I_4$$

が成り立ち，上記からよく知られた Jones 多項式のスケイン関係式が得られる．

2 双曲体積

3 次元の上半空間モデル $\mathbb{H}^3$ を，xyz 空間の $z>0$ の部分，すなわち $1, i, j$ を 4 元数体の基底の一部（ただし $i=\sqrt{-1}$）としたときの

$$\{(x+yi)+zj \in \mathbb{C}+\mathbb{R}j \mid z>0\}$$

に計量

$$ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{z^2}$$

を入れて定まるものとし，$\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ とみなす．上半空間モデル $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換群は

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc=1 \right\} \Big/ \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

である：境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ に $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ が 1 次分数変換で作用し，これが $\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換として一意に拡張される．なお，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{H}^3$ への作用は推移的である．また，単位球体モデル $\mathbb{D}^3$ を，3 次元の単位球体の内部 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2<1\}$ に計量

$$ds^2 = \frac{4(dx^2+dy^2+dz^2)}{(1-x^2-y^2-z^2)^2}$$

を入れて定める．このとき，$\mathbb{H}^3$ と $\mathbb{D}^3$ は等長同相であることが知られている．単位球体モデル $\mathbb{D}^3$ の任意の測地線（resp. 全測地面）は，$\partial\mathbb{D}^3$ と，直交する円（resp. 球面）か直線（resp. 平面）と $\mathbb{D}^3$ の共通部分であり，双曲空間の図を描くときに $\mathbb{D}^3$ の図を用いることもある．

3 次元双曲多様体 M とは，M の各点の近傍が $\mathbb{H}^3$ の開集合と同相であるような局所座標を持っていて，2 つの近傍の交叉部分での座標変換が $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の元で書けるようなもののことである．完備[*1]な 3 次元双曲多様体の分類は，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ のある種の離散部分群の分類に帰着されることが知られている．さらに，カスプと呼ばれる，トーラスと半直線の直積と等長同相な一部を持つ 3 次元双曲多様体を考える．体積が有限である完備な 3 次元双曲多様体は，閉 3 次元多様体かカスプ付きの 3 次元多様体であることが知られており，特に，3 次元球面における絡み目補空間 $S^3\backslash L$ にカスプ付きの双曲多様体の構造が入るとき，L は双曲絡み目であるという．

Remark 2.1. 非自明な結び目について，それがトーラス結び目でもサテライト結び目でもないとき，双曲結び目であることが知られている．

双曲絡み目の 3 次元球面における補空間の有限体積で完備な双曲構造を考える．絡み目補空間には，理想 4 面体分割を用いて具体的な双曲構造を入れることができる．さらに，双曲絡み目の補空間には，体積要素も定義されており，その積分は有限の値に収束し，これを補空間の双曲体積と呼ぶ．絡み目補空間の双曲体積は理想 4 面体の体積を用いて表され，理想 4 面体の体積は 2 重対数関数を用いて記述される．

[*1] 展開写像が被覆写像であることとして定義するが，距離空間としての完備性と同値である．

3　体積予想から Chen-Yang 予想へ

Kashaev は量子 2 重対数関数を用いて，結び目 K に対し，複素数値の不変量 $\langle K\rangle_N$（N は 2 以上の整数）を定義した．さらに，$\langle K\rangle_N$ の $N\to\infty$ における漸近挙動に双曲結び目 K の補空間 $S^3\backslash K$ の双曲体積 $\mathrm{Vol}(S^3\backslash K)$ が現れることを予想した：

Conjecture 3.1 ([6])**.**

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi}{N}\log|\langle K\rangle_N| = \mathrm{Vol}(S^3\backslash K).$$

そして，この Kashaev 予想は，Murakami-Murakami によって，Kashaev の不変量 $\langle K\rangle_N$ は色付き Jones 多項式の 1 の N 乗根における値 $J_N(K;e^{2\pi\sqrt{-1}/N})$ に等しい（より一般に絡み目に対して正しい）ことが示され，上記の予想は，一般の結び目と適切に正規化された単体的体積に対して再定式化された：

Conjecture 3.2 ([8])**.**

$$\lim_{N\to\infty}\frac{2\pi}{N}\log|J_N(K;e^{2\pi\sqrt{-1}/N})| = v_3||S^3\backslash K||.$$

これを体積予想と呼ぶ．この予想のコンセプトは，「量子不変量の漸近挙動が双曲体積を記述するであろう」というものであり，以降，さまざまな体積予想が提唱された．

Remark 3.3. Conjecture 3.2 における色付き Jones 多項式は，先ほどの $V_{\boldsymbol{j}}^{(r)}(L)$ を調整および修正したものである．

絡み目の色付き Jones 多項式は，Kauffman ブラケットを用いたスケイン関係式でも定まる．他方，3 次元多様体に対しては，スケイン理論的に Reshetikhin-Turaev 不変量や Turaev-Viro 不変量といった量子不変量が定義される．これらについても，Chen-Yang は体積予想を提唱した．本稿では，Turaev-Viro 不変量に対する予想のみを紹介する．

Conjecture 3.4 ([2])**.** 有限体積で完備な双曲構造を持つ 3 次元多様体 M に対して，

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r:\mathrm{odd}}}\frac{2\pi}{r}\log TV_r(M;e^{2\pi\sqrt{-1}/r}) = \mathrm{Vol}(M)$$

が成り立つ．

これは Chen-Yang 予想と呼ばれる．Detcherry-Kalfagianni-Yang は，絡み目補空間に対して，Turaev-Viro 不変量と色付き Jones 多項式の関係を調べ，8 の字結び目 E と Borromean 環 B の補空間の場合について Chen-Yang 予想を証明した：

Theorem 3.5 ([4])**.** 絡み目 L が 8 の字結び目 E または Borromean 環 B のとき，

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ r:\mathrm{odd}}}\frac{2\pi}{r}\log TV_r(S^3\backslash L;e^{2\pi\sqrt{-1}/r}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{2n+1}\log|J_n(L;e^{4\pi\sqrt{-1}/(2n+1)})| = \mathrm{Vol}(S^3\backslash L)$$

が成り立つ．

4 主結果

Murakami は，色付き Jones 多項式について，量子化のパラメータの取り換えや色（ウェイト）に関する仮定の整備を行うことで，絡み目補空間の双曲構造の変形が伴う色付き Jones 多項式の体積予想を定式化・提唱した：

Conjecture 4.1 ([9])**.** 3 次元球面内の ℓ 成分の双曲絡み目 $L = L_1 \sqcup \cdots \sqcup L_\ell$ について，L を特異集合として L_i 周りの錐角が $\alpha_i \in [0, \pi]$ であるような 3 次元双曲錐多様体 $M_{\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell}(L)$ を考える．また，$V_{\boldsymbol{j}}^{(r)}(L) = V_{j_1,\ldots,j_\ell}^{(r)}(L; e^{4\pi\sqrt{-1}/r})$ を L の色付き Jones 多項式であって L_i の色がウェイト $j_i \in \{0, 1/2, 1, \ldots, (r-2)/2\}$ であるようなものとする．このとき，$r = 2n+1$ として，

$$\left| 8\pi \lim_{n\to\infty} \frac{j_i}{2n+1} - 2\pi \right| = \alpha_i$$

ならば，$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \log |V_{\boldsymbol{j}}^{(2n+1)}(L)| = \mathrm{Vol}(M_{\boldsymbol{\alpha}}(L))$$

が成り立つ．

Remark 4.2. 3 次元錐多様体は，特異点を 1 周する際の角度が 2π でないような錐型の特異集合を持つ 3 次元の定曲率空間であり，その構造は，曲率に応じて，双曲的，球面的，あるいは Euclid 的にモデル化される．特に，絡み目を特異集合とする双曲錐多様体は，絡み目補空間の双曲構造が変形して完備性が崩れたものとして扱われる．また，錐多様体の体積については，多くの研究があり，さまざまな絡み目に対して，それらに沿ったものに関する公式が与えられている．本研究では，Abrosimov-Mednykh および Mednykh による議論や計算結果 [1, 7] を用いた [5].

本講演の主結果は，上記の Conjecture 4.1 を 8 の字結び目と Borromean 環の場合に条件付きで証明したことである．主定理の条件を述べるために，色付き Jones 多項式のポテンシャル関数を導入する．絡み目 L の色付き Jones 多項式 $V_{\boldsymbol{j}}^{(r)}(L)$ が，十分大きい r に対して，Ω を $\mathbb{C}^\nu$ 内の領域とし，P_r を増大度が高々多項式オーダーであるような量として，

$$V_{\boldsymbol{j}}^{(r)}(L) \sim \int_\Omega P_r \exp\left[\frac{r}{2\pi\sqrt{-1}} \Phi_L(\boldsymbol{\alpha}; z_1, \ldots, z_\nu)\right] dz_1 \cdots dz_\nu$$

と近似できるとき，$\Phi_L(z_1, \ldots, z_\nu) = \Phi_L(\boldsymbol{\alpha}; z_1, \ldots, z_\nu)$ を $V_{\boldsymbol{j}}^{(r)}(L)$ のポテンシャル関数と呼ぶ．このポテンシャル関数の表示には，2 重対数関数が含まれており，後述する主定理の証明に深くかかわっている．以上を踏まえ，主結果・主定理を述べる：

Theorem 4.3 (K. [5, Theorem 1.2 and Theorem 1.4])**.** Conjecture 4.1 は，以下の場合に成り立つ．

- $L = E$（8 の字結び目）かつ $2\,\mathrm{Im}\left(\Phi_E\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) < \mathrm{Vol}(M_\alpha(E))$；$0 \le \alpha < \alpha_0(E) = 1.76478\ldots$.
- $L = B$（Borromean 環）かつ $2\,\mathrm{Im}\left(\Phi_B\left(\frac{\min\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}}{2}\right)\right) < \mathrm{Vol}(M_{\boldsymbol{\alpha}}(B))$.

Remark 4.4. 8 の字結び目 E に沿った錐多様体 $M_\alpha(E)$ が双曲的であるのは錐角が $0 \le \alpha < \frac{2\pi}{3}$ を満たすときであり，Borromean 環 B に沿った錐多様体 $M_{\boldsymbol{\alpha}}(B)$ が双曲的であるのは錐角がそれぞれ $0 \le \alpha_i < \pi$ を満たすときである．

証明の方針： Theorem 4.3 の証明は，色付き Jones 多項式の有限和表示について，それを体積に対応する最大寄与項を含む部分和とそうでない部分和に適切に分割し，体積を与えない部分和がすべて指数的に小さいことを確認して行う．議論は概して実関数の微積分で行うが，体積を与えない部分和の中には，錐角を大きくしていくと，体積より大きな和因子を持つものを初等的に抑えられないものがある．そこで，そのような部分和に対しては，Poisson 和公式を用いて和を書き換え，各 Fourier 係数の積分路の変形を行うことで適切に上から評価する．この際，ポテンシャル関数の解析が重要であるが，積分路の変形を考える上で，ポテンシャル関数の branch cut が障害となり，Theorem 4.3 の条件を要する．

先行研究との比較： 8 の字結び目については，色付き Jones 多項式以外の量子不変量に対して，Conjecture 4.1 と類似した予想が議論されている．Cho-Murakami は，8 の字結び目 E の色 λ の色付き Alexander 不変量 $\Phi_E^N(\lambda)$ について，n を 5 以上の整数，$c = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1}$，および $\lambda = cN - 1$ とし，$\mathcal{O}(n)$ を E を特異集合とする指数 n の双曲軌道体として，初等的に

$$\lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{N} \log|\sin(\lambda\pi)\cdot\Phi_E^N(\lambda)| = \mathrm{Vol}(\mathcal{O}(n))$$

を証明した [3]．この結果が示す錐角の範囲は $0 < \alpha = \frac{2\pi}{n} \le \frac{2\pi}{5} = 1.25663\ldots < \alpha_0(E)$ である．なお，色付き Alexander 不変量と色付き Jones 多項式はよく似た表示を持つ．また，Wong-Yang は，8 の字結び目の補空間 $S^3\backslash E$ と $M\backslash K$ が同相な組 (M, K) に対して, 条件 $\mathrm{Vol}(M_\alpha(E)) > \mathrm{Vol}(S^3\backslash E)/2$ を満たす錐角 α では，パラメータ q における相対 Reshetikhin-Turaev 不変量について，量子 2 重対数関数，鞍点近似法，および Poisson 和公式などを用いて

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r:\mathrm{odd}}} \frac{4\pi}{r} \log \mathrm{RT}_r(M, K, 2j) = \mathrm{Vol}(M_\alpha(E)) + \sqrt{-1}\mathrm{CS}(M_\alpha(E)) \pmod{\sqrt{-1}\pi^2\mathbb{Z}}$$

を証明した [10]．条件 $\mathrm{Vol}(M_\alpha(E)) > \mathrm{Vol}(S^3\backslash E)/2$ からは $0 \le \alpha < 1.2002\ldots < \alpha_0(E)$ が従う．なお，絡み目補空間の相対 Reshetikhin-Turaev 不変量は，その絡み目に対する色付き Jones 多項式であって量子化の変形パラメータを 2 乗したものに置き換えたもので表せる．一方で，絡み目に対して Conjecture 4.1 を厳密に論じた例は本研究以外にはなく，Borromean 環の場合に，$M_{\boldsymbol{\alpha}}(B)$ が双曲的な錐角の範囲 $[0, \pi)^3$ の中で，主定理の条件が満たされる領域は，数値的に可視化されている [5]．

参考文献

[1] Nikolay Abrosimov and Alexander Mednykh. Geometry of knots and links. In *Topology and geometry—a collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*, volume 33 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 433–453. Eur. Math. Soc., Zürich, [2021] ©2021.

[2] Qingtao Chen and Tian Yang. Volume conjectures for the Reshetikhin-Turaev and the Turaev-Viro invariants. *Quantum Topol.*, 9(3):419–460, 2018.

[3] Jinseok Cho and Jun Murakami. Some limits of the colored Alexander invariant of the figure-eight knot and the volume of hyperbolic orbifolds. *J. Knot Theory Ramifications*, 18(9):1271–1286, 2009.

[4] Renaud Detcherry, Efstratia Kalfagianni, and Tian Yang. Turaev-Viro invariants, colored Jones polynomials, and volume. *Quantum Topol.*, 9(4):775–813, 2018.

[5] Shinichiro Kakuta. On the volume conjecture of the colored jones invariants with arbitrary colors, 2026. in preparation.

[6] R. M. Kashaev. The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm. *Lett. Math. Phys.*, 39(3):269–275, 1997.

[7] Alexander D. Mednykh. On hyperbolic and spherical volumes for knot and link cone-manifolds. In *Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001)*, volume 299 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 145–163. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[8] Hitoshi Murakami and Jun Murakami. The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot. *Acta Math.*, 186(1):85–104, 2001.

[9] Jun Murakami. On Chen-Yang's volume conjecture for various quantum invariants. In *Topology and geometry—a collection of essays dedicated to Vladimir G. Turaev*, volume 33 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 147–159. Eur. Math. Soc., Zürich, [2021] ©2021.

[10] Ka Ho Wong and Tian Yang. Relative Reshetikhin-Turaev invariants, hyperbolic cone metrics and discrete Fourier transforms II, 2020. arXiv:2009.07046 [math.GT].

Department of Pure and Applied Mathematics
School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University
3-4-1 Okubo, Shinjuku
Tokyo 169-8555, Japan

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻博士後期課程 角田 真一朗